Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (170, 171)

NH2G2 tome 1 p. 251 et 254-255

prop : Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque et q une forme quadratique sur E un espace de dimension finie. Alors E admet une base orthogonale pour q.

démo : On procède par récurrence sur $n = \dim E$.

Initialisation : pour $n = 1$, ok

Hérédité : Soit $n \geq 2$, on suppose la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$ et montrons la au rang n.
Soit q une forme quadratique sur E

* Si q est nulle alors toute base est orthogonale
* Sinon, il existe $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$. Ainsi par le lemme : si q est non dégénérée alors $E = F \oplus F^\perp$

on a $E = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$

Donc par hypothèse de récurrence, on a une base q-orthogonale pour $\langle e_1 \rangle^\perp$. On concatène cette base avec e_1 et on obtient une base orthogonale de E.

thm : 1. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{orb}(A) = \mathrm{orb}(A')$ ssi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$

2. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{orb}(A) = \mathrm{orb}(A')$ ssi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$ et $p(A) = p(A')$.
où $p(A) = \max\{\dim F,\ F \subset E,\ \forall x \in F \setminus \{0\},\ {}^t x A x > 0\}$.

démo : On note q et q' les formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$ ayant pour matrices respectivement les matrices A et A' dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. $\Rightarrow$ clair

$\Leftarrow$ Soit $A \in S_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{rg}(A) = r \neq 0$. On va montrer que $A \in \mathrm{Orb}(I_r)$ et on conclura par transitivité de l'action par congruence.

Par la proposition précédente, il existe $(u_1, \dots, u_n)$ une base q-orthogonale de $\mathbb{C}^n$.

* si $q(u_i) = 0$ alors on pose $v_i = u_i$
* si $q(u_i) \neq 0$ alors on pose $v_i = \dfrac{u_i}{\lambda_i}$ où $\lambda_i^2 = q(u_i)$ possible sur $\mathbb{C}$.

On a alors $(v_1, \dots, v_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ telle que $q(v_i) = 0$ ou $q(v_i) = 1$

Quitte à permuter la base, on voit que A est congruente à la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

D'où par invariance du rang, on a nécessairement $k = r$.

2. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $rg(A) = r$ et $p(A) = p$. On pose $q = n - p - r$

La réduction est analogue au cas complexe, sauf que :

* si $q(u_i) > 0$, on pose $\lambda_i = \dfrac{1}{\sqrt{q(u_i)}}$ et $v_i = \lambda_i u_i$ d'où $q(v_i) = 1$
* si $q(u_i) < 0$, on pose $\lambda_i = \dfrac{1}{\sqrt{|q(u_i)|}}$ et $v_i = \lambda_i u_i$ d'où $q(v_i) = -1$

Alors en permuttant les vecteurs de la base pour regrouper les coefficients par signe, on voit que A est congruente à :

$$A' = \begin{pmatrix} I_{p'} & & \\ & -I_{q'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Or on a $p(A') = p'$. Cela résulte de la formule de Grassmann :

Si F' est un sev de dimension $d \geqslant p' + 1$, l'intersection de F' avec G' le sev engendré par les $n - p'$ derniers vecteurs de la base dans laquelle q a pour matrice A' est de dimension :

$$\dim(F' \cap G') = \dim F' + \dim G' - \dim(F' + G') \geqslant p' + 1 + n - p' - n = 1$$

Donc il existe $v \in F' \cap G'$ non nul tel que $q(v) \leqslant 0$. Ainsi $q_{|F'}$ n'est pas définie positive et $p(A') \leqslant p'$

L'inégalité $p(A') \geqslant p'$ est immédiate en considérant le sev engendré par les p' premiers vecteurs de base.

Alors par invariance de p, on a $p' = p$ puis comme le rang de A est $p + q = p' + q'$ on a $q = q'$.

On conclut par transitivité de l'action par congruence.

Questions : Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

- Soit F un sev de E et q non dégénérée alors $E = F \oplus F^\perp$? (Il faut F non isotrope)

  On a $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap \mathrm{Ker}(q))$ en toute généralité.

  Comme q est non dégénérée on a $\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$.

  D'où $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$

  Comme F est non isotrope, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$.

  Ainsi $E = F \oplus F^\perp$.

  Nous ici, on a $F = \langle e_1 \rangle$ avec e_1 non isotrope donc on a les hypothèses souhaitées pour appliquer ce résultat.